



## Penentuan Invers Matriks Tridiagonal dengan Algoritma Lewis

<sup>1</sup>David Aji Saputra, <sup>2,\*</sup>Ahmad Faisol, <sup>3</sup>Fitriani

<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lampung, Indonesia  
Jl. Prof. Dr. Ir. Sumantri Brojonegoro No.1, Bandar Lampung, Indonesia

**Abstrak** — Matriks tridiagonal merupakan jenis matriks bujursangkar yang hanya memiliki elemen tidak nol pada diagonal utama, superdiagonal, dan subdiagonal. Matriks jenis ini sering muncul dalam penyelesaian sistem persamaan linear serta dalam berbagai penerapan komputasi numerik. Salah satu tantangan utama dalam penggunaan matriks tridiagonal adalah menentukan inversnya secara efisien. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers matriks tridiagonal menggunakan Algoritma Lewis, yaitu metode berbasis rekursif yang memanfaatkan pola hubungan antar elemen untuk menghasilkan invers dengan lebih cepat dan efisien, khususnya untuk matriks berdimensi besar dan sparse. Penelitian ini dilakukan secara analitik dan diperkuat dengan implementasi menggunakan bahasa pemrograman Python. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Algoritma Lewis mampu menentukan invers matriks tridiagonal secara sistematis dengan validasi melalui perkalian kembali matriks awal dan hasil invers yang menghasilkan matriks identitas.

**Kata Kunci:** Algoritma Lewis; Aljabar Linear; Invers Matriks; Matriks Tridiagonal; Pemrograman Python.

*Abstract* — A tridiagonal matrix is a type of square matrix that has non-zero elements only on the main diagonal, the superdiagonal, and the subdiagonal. This type of matrix frequently arises in solving systems of linear equations and in various numerical computation applications. One of the main challenges in utilizing tridiagonal matrices is determining their inverse efficiently. This study aims to determine the inverse of a tridiagonal matrix using the Lewis Algorithm, a recursive-based method that exploits the relationship between matrix elements to compute the inverse more quickly and efficiently, especially for large and sparse matrices. The research was conducted analytically and supported by implementation using the Python programming language. The results show that the Lewis Algorithm can systematically compute the inverse of a tridiagonal matrix, with validation performed by multiplying the original matrix with its computed inverse, yielding the identity matrix.

**Keywords:** Lewis Algorithm; Linear Algebra; Matrix Inverse; Tridiagonal Matrix; Python Programming.

\* Corresponding author:

Ahmad Faisol

Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia

[ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id](mailto:ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id)

### 1. PENDAHULUAN

Matriks merupakan salah satu materi dasar untuk mempelajari ilmu matematika khususnya tentang aljabar [7]. Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan, bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dari matriks, dalam matriks dikenal ukuran matriks yang disebut ordo yaitu banyaknya baris  $\times$  banyaknya kolom [1]. Salah satu jenis matriks yang sering ditemui adalah matriks tridiagonal. Matriks tridiagonal adalah matriks bujursangkar yang seluruh elemen bukan 0 (nol) berada di sekitar elemen diagonal, sementara elemen lainnya bernilai 0 (nol) [3].

Permasalahan yang sering dihadapi dalam studi matriks adalah menentukan invers dari suatu matriks. Invers matriks sangat penting dalam berbagai bidang, terutama dalam ilmu matematika maupun ilmu terapan, komputasi, dan ilmu teknik [8]. Beberapa metode yang digunakan dalam menghitung invers suatu matriks adalah metode substitusi, partisi matriks, matriks adjoin, dan eliminasi Gauss-Jordan [6]. Diperlukan metode atau algoritma khusus untuk menghitung invers matriks tridiagonal.

Salah satu metode lain yang dikembangkan untuk menentukan invers matriks tridiagonal adalah Algoritma Lewis. Proses dalam algoritma Lewis melibatkan langkah-langkah yang sistematis untuk menghitung elemen-elemen dari invers matriks tridiagonal dengan menggunakan hubungan antara elemen-elemen matriks tersebut. Dengan memanfaatkan sifat-sifat dari matriks tridiagonal, algoritma ini dapat mengurangi jumlah operasi yang diperlukan, sehingga mempercepat proses perhitungan.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers matriks tridiagonal dengan Algoritma Lewis secara analitik, sebagai tambahan akan dibuat algoritma computer untuk menentukan invers matriks tridiagonal menggunakan pemrograman *Python*.

## 2. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi literatur yang diperoleh dengan mengumpulkan dan mengolah informasi yang relevan dari berbagai sumber, seperti buku, jurnal, dan artikel yang berkaitan dengan topik penelitian baik dari dalam negeri ataupun luar negeri yang menunjang pada penelitian yang dilakukan. Adapun langkah yang digunakan dalam menyelesaikan masalah dalam penelitian ini antara lain:

1. Diberikan matriks tridiagonal  $A$  berukuran  $n \times n$  :

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{k-1,k} \\ 0 & 0 & 0 & a_{k,k-1} & a_{kk} \end{bmatrix}$$

dengan  $a_{k-1,k} \neq 0$  dan  $a_{k,k-1} \neq 0$  untuk  $2 \leq k \leq n$ .

2. Hitung  $\hat{z}_k$ .

$$\hat{z}_n = 1, \hat{z}_{n-1} = -\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}}, \hat{z}_{k-1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_k - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_{k+1} \quad (n > k > 1)$$

3. Hitung  $z_k$ .

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{2,1}}, z_{k+1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k+1,k}} z_k - \frac{a_{k-1,k}}{a_{k+1,k}} z_{k-1} \quad (1 > k > n)$$

4. Hitung  $e_k$ .

$$e_1 = 1, e_{k+1} = \frac{e_{k+1,k}}{e_{k,k+1}} e_k \quad (1 < k < n)$$

5. Setelah nilai dari  $\{\hat{z}_k\}$ ,  $\{z_k\}$ , dan  $\{e_k\}$  diperoleh. Cari  $A^{-1}$  menggunakan persamaan berikut:

$$x_{1n} = \frac{1}{(a_{11}\hat{z}_1 + a_{21}\hat{z}_2)}$$

dan

$$x_{sk} = (e_s z_s x_{1n}) \hat{z}_k \quad (s \leq k), \quad (1 \leq k \leq n), \quad (\text{Untuk matriks diatas subdiagonal}),$$

$$x_{sk} = (e_s \hat{z}_s x_{1n}) z_k \quad (s > k), \quad (1 \leq k \leq n), \quad (\text{Untuk matriks dibawah diagonal utama})$$

6. Diperoleh  $A^{-1} = X = [x_{s,k}]$ .

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini terbagi menjadi 3 bagian antara lain, matriks tridiagonal dengan bilangan asli berukuran  $5 \times 5$  menggunakan Pemrograman Python, matriks tridiagonal dengan entri diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan  $r$ , dan matriks tridiagonal dengan entri diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan  $-r$ .

### 3.1. Menentukan Invers Matriks Tridiagonal menggunakan Pemrograman Python

Diberikan suatu matriks tridiagonal A dengan bilangan asli yang berordo  $5 \times 5$  sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks tridiagonal ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 1.

```

import numpy as np

# Langkah pertama
# Diberikan matriks tridiagonal A berukuran 5x5
print("langkah pertama")
A = np.array([[1, 2, 0, 0, 0],
              [3, 2, 4, 0, 0],
              [0, 5, 3, 3, 0],
              [0, 0, 2, 4, 1],
              [0, 0, 0, 4, 5]])
n = A.shape[0]
print("Matriks Tridiagonal A:")
print(A)

```

Gambar 1. Sintaks matriks tridiagonal

Setelah matriks tridiagonal terbentuk, selanjutnya ditentukan nilai  $\hat{z}_k$ . Nilai  $\hat{z}_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{z}_n = 1, \hat{z}_{n-1} = -\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}}, \hat{z}_{k-1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_k - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_{k+1} \quad (n > k > 1)$$

diperoleh

$$\hat{z}_5 = 1, \hat{z}_4 = -5, \hat{z}_3 = -\frac{16}{3}, \hat{z}_2 = -\frac{3}{2}, \text{ dan } \hat{z}_1 = -\frac{71}{6}$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 2.

```

# Langkah kedua
# Menghitung _hat_z_(k)
def compute_hat_z(A):
    """
    Menghitung nilai \hat{z}_k berdasarkan aturan yang diberikan.
    """
    hat_z = np.zeros(n)
    hat_z[-1] = 1
    hat_z[-2] = -A[-1,-1] / A[-2,-1]
    for k in range(n-2,0,-1):
        hat_z[k-1] = (-A[k, k] / A[k-1, k]) * hat_z[k] - (A[k+1, k] / A[k-1, k]) * hat_z[k+1]
    return hat_z

hat_z_values = compute_hat_z(A)

print("langkah kedua, diperoleh:")
i = 0
while i < n:
    print("hat_z_", i+1, "=", hat_z_values[i])
    i += 1

```

Gambar 2. Sintaks nilai  $\hat{z}_k$

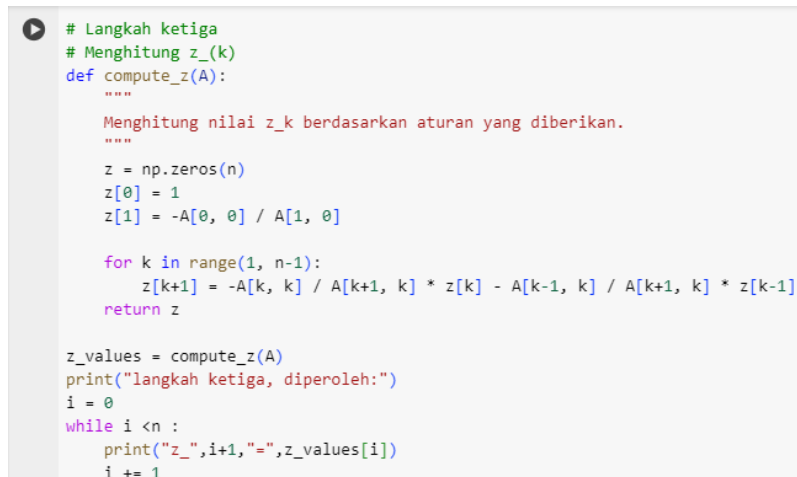
Setelah nilai  $\hat{z}_k$  diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai  $z_k$ . Nilai  $z_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{2,1}}, z_{k+1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k+1,k}}z_k - \frac{a_{k-1,k}}{a_{k+1,k}}z_{k-1} \quad (1 < k < n)$$

diperoleh

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{3}, z_3 = -\frac{4}{15}, z_4 = \frac{16}{15}, \text{ dan } z_5 = -\frac{13}{15}$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 3.



```

# Langkah ketiga
# Menghitung z_(k)
def compute_z(A):
    """
    Menghitung nilai z_k berdasarkan aturan yang diberikan.
    """
    z = np.zeros(n)
    z[0] = 1
    z[1] = -A[0, 0] / A[1, 0]

    for k in range(1, n-1):
        z[k+1] = -A[k, k] / A[k+1, k] * z[k] - A[k-1, k] / A[k+1, k] * z[k-1]
    return z

z_values = compute_z(A)
print("langkah ketiga, diperoleh:")
i = 0
while i < n :
    print("z_", i+1, "=", z_values[i])
    i += 1

```

Gambar 3. Sintaks nilai  $z_k$

Setelah nilai  $z_k$  diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai  $e_k$ . Nilai  $e_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$e_1 = 1, e_{k+1} = \frac{e_{k+1,k}}{e_{k,k+1}} e_k \quad (1 < k < n)$$

diperoleh

$$e_1 = 1, e_2 = \frac{3}{2}, e_3 = \frac{15}{8}, e_4 = \frac{5}{4}, \text{ dan } e_5 = 5$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 4.

```

▶ # Langkah keempat
# Menghitung e_(k)
def compute_e(A):
    """
    Menghitung nilai e_k berdasarkan aturan yang diberikan.
    """
    e = np.zeros(n)
    e[0]=1
    for k in range(0, n-1):
        e[k+1] = (A[k+1, k] / A[k, k+1]) * e[k]
    return e

e_values = compute_e(A)
print("langkah keempat, diperoleh:")
i = 0
while i < n :
    print("e_", i+1, "=", e_values[i])
    i += 1

```

Gambar 4. Sintaks nilai  $e_k$ 

Setelah semua nilai  $\{\hat{z}_k\}$ ,  $\{z_k\}$ , dan  $\{e_k\}$  diperoleh, langkah selanjutnya adalah mencari nilai-nilai dari setiap entri pada matriks untuk mendapatkan invers matriks tridiagonal  $A$ . Langkah pertama menggunakan persamaan berikut:

$$x_{1n} = \frac{1}{(a_{11}\hat{z}_1 + a_{21}\hat{z}_2)}$$

diperoleh

$$x_{15} = \frac{1}{1\left(-\frac{71}{6}\right) + 3\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{3}{49}$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 5.

```

▶ # Langkah kelima
# Menghitung entri x_1n dari A^-1
A_inv = np.zeros((n, n))
def compute_x_1n(A, hat_z):
    """
    Menghitung nilai x_{1,n} berdasarkan rumus yang diberikan.
    """
    x_1n = 1 / (A[0, 0] * hat_z[0] + A[1, 0] * hat_z[1])
    return x_1n

x_1n_value = compute_x_1n(A, hat_z_values)
A_inv[0,n-1]=x_1n_value
print("langkah kelima, diperoleh:")
print("x_(1", n, ")=", x_1n_value)

```

Gambar 5. Sintaks nilai entri  $x_{1n}$ 

Setelah nilai entri  $x_{1n}$  diperoleh, selanjutnya untuk mencari invers matriks yang entri-entrinya terdapat diatas subdiagonal menggunakan persamaan berikut:

$$x_{sk} = (e_s z_s x_{1n}) \hat{z}_k \quad (s \leq k), (1 \leq k \leq n)$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= \frac{71}{98}, x_{22} = -\frac{9}{196}, x_{33} = \frac{16}{98}, x_{44} = \frac{20}{49}, x_{55} = \frac{13}{49}, \\
 x_{12} &= \frac{9}{98}, x_{23} = \frac{8}{49}, x_{33} = \frac{8}{49}, x_{34} = -\frac{15}{98}, x_{45} = -\frac{4}{49}, \\
 x_{13} &= -\frac{16}{49}, x_{24} = -\frac{15}{98}, x_{35} = \frac{3}{98}, x_{14} = \frac{15}{49}, x_{25} = \frac{3}{98}.
 \end{aligned}$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 6.

```

# Langkah keenam
# Menghitung entri x_sk dari A^-1, untuk s<=k dan 1<=k<=n
def compute_x_sk(A, e, z, x_1n, hat_z):
    """
    Menghitung nilai x_{s,k} untuk s <= k
    """
    X = np.zeros((n, n))
    for s in range(n):
        for k in range(s, n):
            X[s, k] = (e[s] * z[s] * x_1n) * hat_z[k]
    return X

X_values = compute_x_sk(A, e_values, z_values, x_1n_value, hat_z_values)
print("langkah keenam, diperoleh:")

i = 0
while i < n :
    j=i
    while j < n:
        A_inv[(i,j)]=X_values[(i,j)]
        print("x_(",i+1,j+1,")=",X_values[(i,j)])
        j += 1
    i += 1

```

Gambar 6. Sintaks nilai entri  $x_{sk}$  untuk  $(s \leq k)$

dan untuk mencari invers matriks yang entri-entrinya terdapat dibawah diagonal utama menggunakan persamaan berikut:

$$x_{sk} = (e_s \hat{z}_s x_{1n}) z_k \quad (s > k), (1 \leq k \leq n)$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 x_{21} &= \frac{27}{196}, x_{32} = \frac{10}{49}, x_{43} = -\frac{5}{49}, x_{54} = -\frac{16}{49}, x_{31} = -\frac{30}{49}, \\
 x_{42} &= -\frac{25}{196}, x_{53} = \frac{4}{49}, x_{41} = \frac{75}{196}, x_{52} = \frac{5}{49}, x_{51} = -\frac{15}{49}.
 \end{aligned}$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 7.

```

▶ # Langkah ketujuh
# Menghitung entri x_sk dari A^-1, untuk s>k dan 1<=k<=n
def compute_x_sk_lower(A, e, hat_z, x_1n, z):
    """
    Menghitung nilai x_{s,k} untuk s > k
    """

    X = np.zeros((n, n))
    for s in range(n):
        for k in range(s):
            X[s, k] = (e[s] * hat_z[s] * x_1n) * z[k]
    return X

X_lower_values = compute_x_sk_lower(A, e_values, hat_z_values, x_1n_value, z_values)
print("langkah ketujuh, diperoleh:")
i = 0
while i < n :
    j=i+1
    while j < n:
        A_inv[(j,i)]=X_lower_values[(j,i)]
        print("x_(",j+1,i+1,")=",X_lower_values[(j,i)])
        j += 1
    i += 1

```

Gambar 7. Sintaks nilai entri  $x_{sk}$  untuk ( $s > k$ )

Setelah semua entri pada matriks diperoleh, selanjutnya gabungkan semua entri menjadi sebuah matriks yang disebut invers matriks  $A$ . Invers matriks ini memiliki bentuk sebagai berikut:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{71}{98} & \frac{9}{98} & -\frac{16}{49} & \frac{15}{49} & -\frac{3}{49} \\ \frac{27}{196} & -\frac{9}{196} & \frac{8}{49} & -\frac{15}{98} & \frac{3}{98} \\ -\frac{30}{49} & \frac{10}{49} & \frac{16}{98} & \frac{15}{98} & \frac{3}{49} \\ \frac{75}{196} & -\frac{25}{196} & -\frac{5}{49} & \frac{20}{49} & -\frac{4}{49} \\ -\frac{15}{49} & \frac{5}{49} & \frac{4}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{13}{49} \end{bmatrix}$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 8.

```

▶ # Langkah kedelapan
# Print invers matriks A
print("langkah kedelapan, diperoleh A^(-1)=")
print(np.round(A_inv, 2))

```

Gambar 8. Sintaks matriks  $A^{-1}$ 

Setelah invers matriks  $A$  diperoleh, akan dibuktikan bahwa matriks  $A$  dikalikan dengan invers matriks  $A$  merupakan matriks identitas. Diberikan bentuk perkalian matriks  $A^{-1}$  dan  $A$  sebagai berikut:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{71}{98} & \frac{9}{98} & -\frac{16}{49} & \frac{15}{49} & -\frac{3}{49} \\ \frac{27}{196} & \frac{9}{196} & \frac{8}{49} & \frac{15}{98} & \frac{3}{98} \\ -\frac{30}{49} & \frac{10}{49} & \frac{16}{98} & -\frac{15}{98} & \frac{3}{49} \\ \frac{75}{196} & -\frac{25}{196} & -\frac{5}{49} & \frac{20}{49} & -\frac{4}{49} \\ -\frac{15}{49} & \frac{5}{49} & \frac{4}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{13}{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh hasil kali invers matriks  $A$  dengan matriks  $A$  adalah matriks identitas sebagai berikut:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhitungan ini akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan pemrograman Python, dapat dilihat pada Gambar 9.

```
# Langkah kesembilan
# Cek A*A_inv = I dan A_inv*A=I ?
print("langkah kesembilan, diperoleh:")
I_kiri = np.dot(A, A_inv)
print(np.round(I_kiri, 2))
I_kanan = np.dot(A_inv, A)
print(np.round(I_kanan, 2))
```

Gambar 9. Sintaks perkalian matriks  $A$  dengan  $A^{-1}$

### 3.2. Matriks Tridiagonal dengan entri diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan $r$

Akan dibuktikan matriks tridiagonal dengan diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan  $r$  memiliki invers matriks dengan entri  $x_{21} = rx_{12}$ ,  $x_{32} = rx_{23}$ ,  $x_{43} = rx_{34}$ , dan  $x_{54} = rx_{45}$ . Diberikan suatu matriks tridiagonal  $A$  berordo  $5 \times 5$  sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ ra & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & ra & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & ra & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & ra & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah matriks tridiagonal terbentuk, selanjutnya ditentukan nilai  $\hat{z}_k$ . Nilai  $\hat{z}_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{z}_n = 1, \hat{z}_{n-1} = -\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}}, \hat{z}_{k-1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_k - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_{k+1} \quad (n > k > 1)$$

diperoleh

$$\hat{z}_5 = 1, \hat{z}_4 = -\frac{1}{a}, \hat{z}_3 = \frac{1 - a^2r}{a^2}, \hat{z}_2 = \frac{-1 + 2a^2r}{a^3}, \text{ dan } \hat{z}_1 = \frac{1 - 3a^2r + a^4r^2}{a^4}$$

Setelah nilai  $\hat{z}_k$  diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai  $z_k$ . Nilai  $z_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{2,1}}, z_{k+1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k+1,k}}z_k - \frac{a_{k-1,k}}{a_{k+1,k}}z_{k-1} \quad (1 > k > n)$$

diperoleh

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{ra}, z_3 = \frac{1 - a^2r}{a^2r^2}, z_4 = \frac{-1 + 2a^2r}{a^3r^3}, \text{ dan } z_5 = \frac{1 - 3a^2r + a^4r^2}{a^4r^4}$$

Setelah nilai  $z_k$  diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai  $e_k$ . Nilai  $e_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$e_1 = 1, e_{k+1} = \frac{e_{k+1,k}}{e_{k,k+1}}e_k \quad (1 < k < n)$$

diperoleh

$$e_1 = 1, e_2 = r, e_3 = r^2, e_4 = r^3, \text{ dan } e_5 = r^4.$$

Setelah semua nilai  $\{\hat{z}_k\}, \{z_k\}$ , dan  $\{e_k\}$  diperoleh, langkah selanjutnya adalah mencari nilai-nilai dari setiap entri pada matriks untuk mendapatkan invers matriks tridiagonal  $A$ . Langkah pertama menggunakan persamaan berikut:

$$x_{1n} = \frac{1}{(a_{11}\hat{z}_1 + a_{21}\hat{z}_2)}$$

diperoleh

$$x_{15} = \frac{1}{1\left(\frac{1 - 3a^2r + a^4r^2}{a^4}\right) + ra\left(\frac{-1 + 2a^2r}{a^3}\right)} = \frac{1}{1 - 4a^2r + 3a^4r^2}$$

Setelah nilai entri  $x_{1n}$  diperoleh, selanjutnya untuk mencari invers matriks yang entri-entrinya terdapat diatas subdiagonal menggunakan persamaan berikut:

$$x_{sk} = (e_s z_s x_{1n}) \hat{z}_k \quad (s \leq k), (1 \leq k \leq n)$$

dan untuk mencari invers matriks yang entri-entrinya terdapat dibawah diagonal utama menggunakan persamaan berikut:

$$x_{sk} = (e_s \hat{z}_s x_{1n}) z_k \quad (s > k), (1 \leq k \leq n)$$

diperoleh invers matriks  $A$  sebagai berikut:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-3a^2r+a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a+2a^3r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{a^2-a^4r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} \\ \frac{-ar+2a^3r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-2a^2r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a+a^3r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{a^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} \\ \frac{a^2r^2-a^4r^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-ar+a^3r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-2a^2r+a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a+a^3r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{a^2-a^4r}{1-4a^2r+3a^4r^2} \\ \frac{-a^3r^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{a^2r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-ar+a^3r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-2a^2r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a+2a^3r}{1-4a^2r+3a^4r^2} \\ \frac{a^4r^4}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a^3r^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{a^2r^2-a^4r^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-ar+2a^3r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-3a^2r+a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa entri  $x_{21} = rx_{12}, x_{32} = rx_{23}, x_{43} = rx_{34},$  dan  $x_{54} = rx_{45}$  diuraikan sebagai berikut:

$$x_{21} = rx_{12},$$

$$x_{21} = \frac{r(-a + 2a^3r)}{1 - 4a^2r + 3a^4r^2} = rx_{12}$$

$$x_{32} = rx_{23},$$

$$x_{32} = \frac{r(-a + a^3r)}{1 - 4a^2r + 3a^4r^2} = rx_{23}$$

$$x_{43} = rx_{34},$$

$$x_{43} = \frac{r(-a + a^3r)}{1 - 4a^2r + 3a^4r^2} = rx_{34}$$

dan  $x_{54} = rx_{45},$

$$x_{32} = \frac{r(-a + 2a^3r)}{1 - 4a^2r + 3a^4r^2} = rx_{45}$$

Sehingga terbukti matriks tridiagonal dengan diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan  $r$  dari subdiagonalnya memiliki invers matriks dengan entri  $x_{21} = rx_{12}, x_{32} = rx_{23}, x_{43} = rx_{34},$  dan  $x_{54} = rx_{45}.$

Akan dibuktikan bahwa matriks  $A$  dikalikan dengan invers matriks  $A$  merupakan matriks identitas.

Diberikan bentuk perkalian matriks  $A^{-1}$  dan  $A$  sebagai berikut:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{1-3a^2r+a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a+2a^3r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{a^2-a^4r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} \\ \frac{-ar+2a^3r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-2a^2r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a+a^3r}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{a^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{-a^3}{1-4a^2r+3a^4r^2} \\ \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{a^2r^2-a^4r^3} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{-ar+a^3r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-2a^2r+a^4r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{-a+a^3r} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{a^2-a^4r} \\ \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{-a^3r^3} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{a^2r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{-ar+a^3r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-2a^2r} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{-a+2a^3r} \\ \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{a^4r^4} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{-a^3r^3} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{a^2r^2-a^4r^3} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{-ar+2a^3r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-3a^2r+a^4r^2} \\ \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} & \frac{1-4a^2r+3a^4r^2}{1-4a^2r+3a^4r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ ra & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & ra & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & ra & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & ra & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti hasil kali matriks  $A$  dengan invers matriks  $A$  adalah matriks identitas sebagai berikut:

$$AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3. Matriks tridiagonal dengan entri diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan $-r$

Akan dibuktikan matriks tridiagonal dengan diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan  $r$  memiliki invers matriks dengan entri  $x_{21} = -rx_{12}$ ,  $x_{32} = -rx_{23}$ ,  $x_{43} = -rx_{34}$ , dan  $x_{54} = -rx_{45}$ . Diberikan suatu matriks tridiagonal  $A$  berordo  $5 \times 5$  sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ -ra & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -ra & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -ra & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -ra & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah matriks tridiagonal terbentuk, selanjutnya ditentukan nilai  $\hat{z}_k$ . Nilai  $\hat{z}_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{z}_n = 1, \hat{z}_{n-1} = -\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}}, \hat{z}_{k-1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_k - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k-1,k}} \hat{z}_{k+1} \quad (n > k > 1)$$

diperoleh

$$\hat{z}_5 = 1, \hat{z}_4 = -\frac{1}{a}, \hat{z}_3 = \frac{1+a^2r}{a^2}, \hat{z}_2 = \frac{-1-2a^2r}{a^3}, \text{ dan } \hat{z}_1 = \frac{1+3a^2r-a^4r^2}{a^4}$$

Setelah nilai  $\hat{z}_k$  diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai  $z_k$ . Nilai  $z_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{2,1}}, z_{k+1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k+1,k}} z_k - \frac{a_{k-1,k}}{a_{k+1,k}} z_{k-1} \quad (1 > k > n)$$

diperoleh

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{ra}, z_3 = \frac{1+a^2r}{a^2r^2}, z_4 = \frac{1+2a^2r}{a^3r^3}, \text{ dan } z_5 = \frac{1+3a^2r+a^4r^2}{a^4r^4}$$

Setelah nilai  $z_k$  diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai  $e_k$ . Nilai  $e_k$  dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$e_1 = 1, e_{k+1} = \frac{e_{k+1,k}}{e_{k,k+1}} e_k \quad (1 < k < n)$$

diperoleh

$$e_1 = 1, e_2 = -r, e_3 = r^2, e_4 = -r^3, \text{ dan } e_5 = r^4.$$

Setelah semua nilai  $\{\hat{z}_k\}$ ,  $\{z_k\}$ , dan  $\{e_k\}$  diperoleh, langkah selanjutnya adalah mencari nilai-nilai dari setiap entri pada matriks untuk mendapatkan invers matriks tridiagonal  $A$ . Langkah pertama menggunakan persamaan berikut:

$$x_{1n} = \frac{1}{(a_{11}\hat{z}_1 + a_{21}\hat{z}_2)}$$

diperoleh

$$x_{15} = \frac{1}{1\left(\frac{1+3a^2r-a^4r^2}{a^4}\right) + (-ra)\left(\frac{-1-2a^2r}{a^3}\right)} = \frac{1}{1+4a^2r+a^4r^2}$$

Setelah nilai entri  $x_{1n}$  diperoleh, selanjutnya untuk mencari invers matriks yang entri-entrinya terdapat diatas subdiagonal menggunakan persamaan berikut:

$$x_{sk} = (e_s z_s x_{1n}) \hat{z}_k \quad (s \leq k), (1 \leq k \leq n)$$

dan untuk mencari invers matriks yang entri-entrinya terdapat dibawah diagonal utama menggunakan persamaan berikut:

$$x_{sk} = (e_s \hat{z}_s x_{1n}) z_k \quad (s > k), (1 \leq k \leq n)$$

diperoleh invers matriks  $A$  sebagai berikut:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+3a^2r-a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a-2a^3r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{a^2+a^4r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a^3}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a^3}{1+4a^2r+a^4r^2} \\ \frac{ar+2a^3r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+2a^2r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a-a^3r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{a^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a^3}{1+4a^2r+a^4r^2} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2r^2+a^4r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{ar+a^3r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+2a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{-a-a^3r} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2+a^4r} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^3r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{ar+a^3r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+2a^2r} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{-a-2a^3r} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^4r^4} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^3r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2r^2+a^4r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{ar+2a^3r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+3a^2r-a^4r^2} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa entri  $x_{21} = -rx_{12}, x_{32} = -rx_{23}, x_{43} = -rx_{34},$  dan  $x_{54} = -rx_{45}$  diuraikan sebagai berikut:

$$x_{21} = -rx_{12},$$

$$x_{21} = \frac{-r(-a - 2a^3r)}{1 + 4a^2r + a^4r^2} = -rx_{12}$$

$$x_{32} = -rx_{23},$$

$$x_{32} = \frac{-r(-a - a^3r)}{1 + 4a^2r + a^4r^2} = rx_{23}$$

$$x_{43} = -rx_{34},$$

$$x_{43} = \frac{-r(-a - a^3r)}{1 + 4a^2r + a^4r^2} = -rx_{34}$$

$$\text{dan } x_{54} = -rx_{45},$$

$$x_{32} = \frac{-r(-a - 2a^3r)}{1 + 4a^2r + a^4r^2} = -rx_{45}$$

Sehingga terbukti matriks tridiagonal dengan diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan  $r$  dari subdiagonalnya memiliki invers matriks dengan entri  $x_{21} = -rx_{12}, x_{32} = -rx_{23}, x_{43} = -rx_{34},$  dan  $x_{54} = -rx_{45}.$

Akan dibuktikan bahwa matriks  $A$  dikalikan dengan invers matriks  $A$  merupakan matriks identitas.

Diberikan bentuk perkalian matriks  $A^{-1}$  dan  $A$  sebagai berikut:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{1+3a^2r-a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a-2a^3r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{a^2+a^4r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a^3}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a^3}{1+4a^2r+a^4r^2} \\ \frac{ar+2a^3r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+2a^2r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a-a^3r}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{a^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{-a^3}{1+4a^2r+a^4r^2} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2r^2+a^4r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{ar+a^3r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+2a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{-a-a^3r} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2+a^4r} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^3r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{ar+a^3r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+2a^2r} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{-a-2a^3r} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^4r^4} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^3r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{a^2r^2+a^4r^3} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{ar+2a^3r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+3a^2r-a^4r^2} \\ \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} & \frac{1+4a^2r+a^4r^2}{1+4a^2r+a^4r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ -ra & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -ra & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -ra & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -ra & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti hasil kali matriks  $A$  dengan invers matriks  $A$  adalah matriks identitas sebagai berikut:

$$AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan matriks tridiagonal memiliki struktur unik yang memungkinkan penghitungan inversnya secara sistematis. Salah satu struktur uniknya adalah matriks tridiagonal dengan diagonal utama 1 dan superdiagonal berkelipatan  $r$  dan  $-r$  dari subdiagonal, dengan  $r \neq 0$ . Kedua invers matriks ini memiliki pola antara lain, untuk yang berkelipatan  $r$  entri  $x_{ji} = rx_{ij}$  dengan  $rx_{ji} \neq 0$  atau  $x_{21} = rx_{12}, x_{32} = rx_{23}, x_{43} = rx_{34}$ , dan  $x_{54} = rx_{45}$ , dan untuk yang berkelipatan  $-r$  entri  $x_{21} = -rx_{12}, x_{32} = -rx_{23}, x_{43} = -rx_{34}$ , dan  $x_{54} = -rx_{45}$ . Penelitian ini berhasil menentukan invers matriks tridiagonal dengan menggunakan pendekatan sistematis dengan algoritma Lewis. Hal ini menunjukkan efektifitas dan fleksibilitas algoritma yang digunakan.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, H., & Rorres, C., *Aljabar Linear Elementer. Edisi ke delapan*. Jakarta: Erlangga, 2004.
- [2] Burden, R. L., & Faires, J. D., *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2011.
- [3] Higham, N. J., Efficient algorithms for computing the condition number of a tridiagonal matrix. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(1), 150-165. Wiesbaden : Vieweg, 1986.
- [4] Keller, P., & Wrobel, I., On recursive algorithms for inverting tridiagonal matrices. *arXiv preprint arXiv:1509.09264*, 2015.
- [5] Lewis, J. G., *Algorithm for the Inversion of a Tridiagonal Matrix*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1982.
- [6] Marzuki, C. C., & Aryani, F., Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin. *Jurnal sains matematika dan statistika*, 5(1), 2019.
- [7] Rasmawati, R., Yahya, L., Nuha, A. R., & Resmawan, R., Determinan Suatu Matriks Toeplitz K-Tridiagonal Menggunakan Metode Reduksi Baris dan Ekspansi Kofaktor. Euler: *Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 9(1), 6-16, 2021.
- [8] Strang, G., *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 2016.